Magnetische Feldverdrängung in massivem Eisen.

Von der Technischen Hochschule zu Breslau zur Erlangung der Würde eines Doktor=Ingenieurs genehmigte

Dissertation

Vorgelegt von

Postreferendar Dipl.=Ing.

Joseph Böhm

aus Breslau

Referent: Prof. Dr.=Ing. G. Hilpert

Korreferent: Prof. Dr.=Ing Schammel

Tag der mündlichen Prüfung: 22. Februar 1934.

Breslau

- 1934 -

Meiner lieben Mutter

in Dankbarkeit

gewidmet

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis.

		Seite.
1.	Das Vektordiagramm des Vielfachtransformators mit ineinandergeschachtelten Kernen.	1
2.	Das Wirbelstromdiagramm bei Eisenblechen.	5
3.	Das Vektordiagramm der klassischen Theorie und seine Übereinstimmung mit dem des Vielfachtransformators.	8
4.	Das Verfahren bei starker Sättigung und Hysteresis.	11
5.	Berücksichtigung der Kreis= und Rechtecksform.	13
6.	Konstruktion von halbaußen an.	14
7.	Bemerkungen über die ausgeführten Vektordiagramme.	16
8.	Form und Material des untersuchten Eisens.	16
9.	Untersuchung bei niedrigen Frequenzen.	20
10.	Untersuchung bei Tonfrequenz.	24
11.	Zusammenfassung.	26
	Bezeichnungen.	27
	Literatur.	27
	Lebenslauf.	28

1. Das Vektordiagramm des Vielfachtransformators mit ineinandergeschachtelten Kernen.

Auf Anregung von Herrn Prof. Dr.-Ing. H i l p e r t ist der vorliegenden Arbeit das Ziel gesteckt worden, darzulegen, wie sich auf Grund des Transformatorendiagramms, das jedem Starkstromtechniker geläufig ist, die magnetische Feldverdrängung in massivem Eisen berechnen lässt, selbst wenn das vorliegende Material, wie z.B. Gußeisen, eine sehr stark gekrümmte Magnetisierungskurve und große Hysteresis hat. Es werden nur die Vorgänge im eingeschwungenen Zustande untersucht. Während der Bearbeitung erschien die Dr.=Dissertation von Dipl.-Ing. Krämer, T.H. Braunschweig, über "Wirbelströme in massivem Eisen". Unabhängig von ihr waren die folgenden Untersuchungen zum größten Teil schon gemacht und beendigt. Doch werden einige ihrer Ergebnisse mit den eigenen verglichen.

Aus einem geschlossenen, massiven, magnetischen Kreis (Abb. 1) werde ein Stück I II III IV von 1 cm Länge herausgeschnitten.

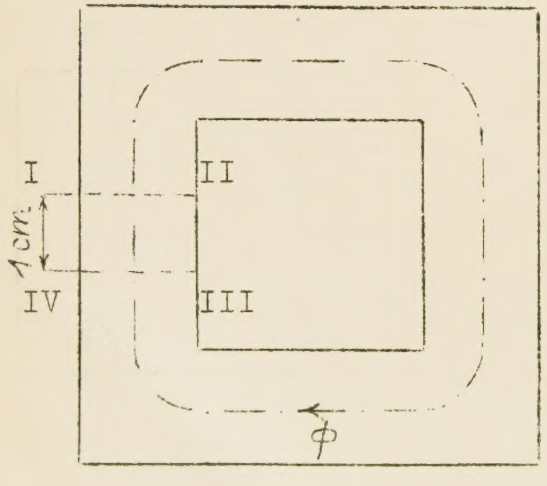


Abb. 1

Abb. 2 zeigt seinen Aufriss (oben) und Grundriss (unten). Der Eisenkern kann als aus mehreren ineinandergeschachtelten Kernen bestehend aufgefasst werden. Zwischen zwei von ihnen liegt eine Kurzschlusswindung vom Widerstand R. In der Mitte herrsche die Induktion $\mathfrak{B}_0$ (Scheitelwert) unter der Einwirkung der magnetischen Feldstärke $\mathfrak{H}_0$, entsprechend herrscht

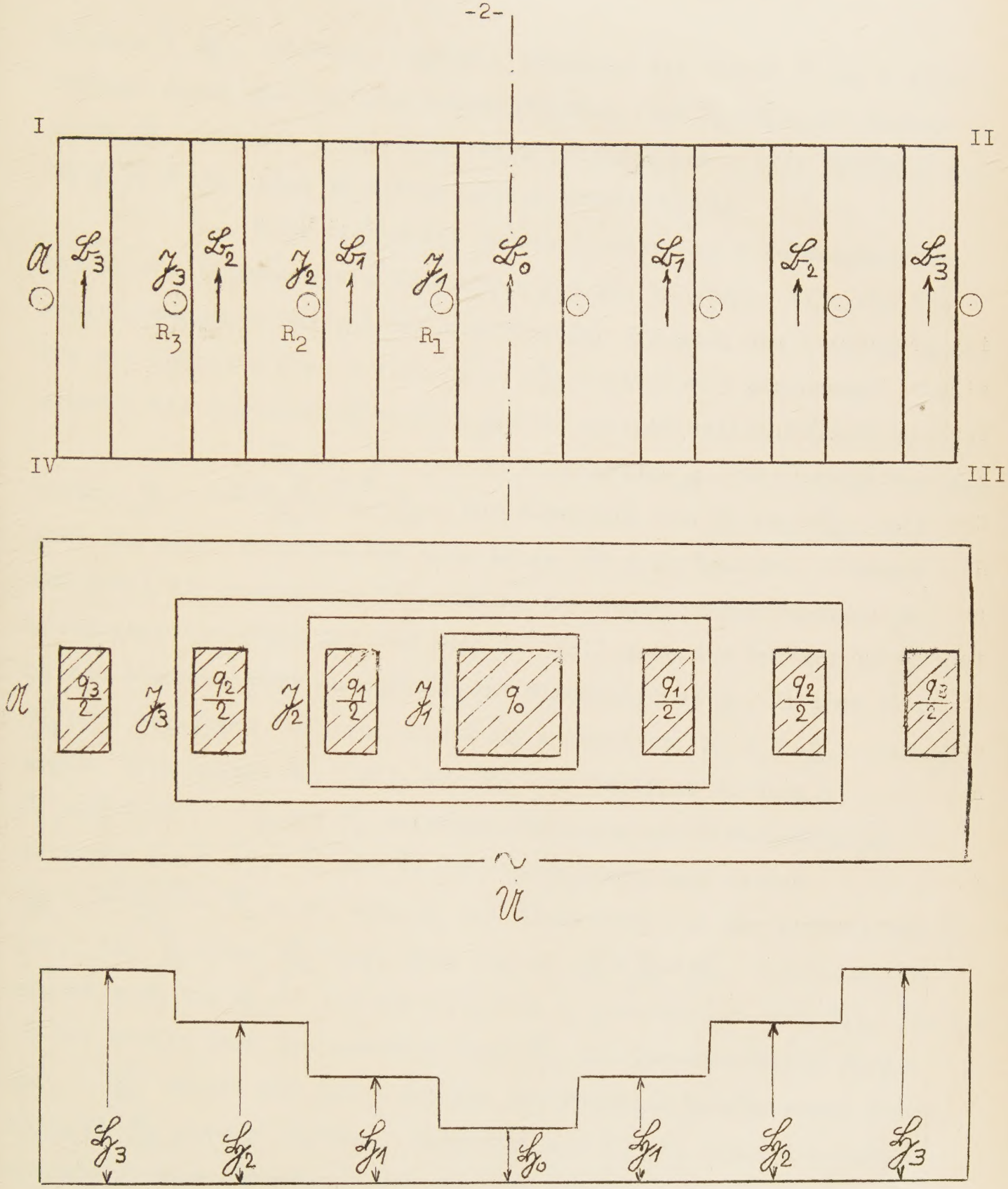
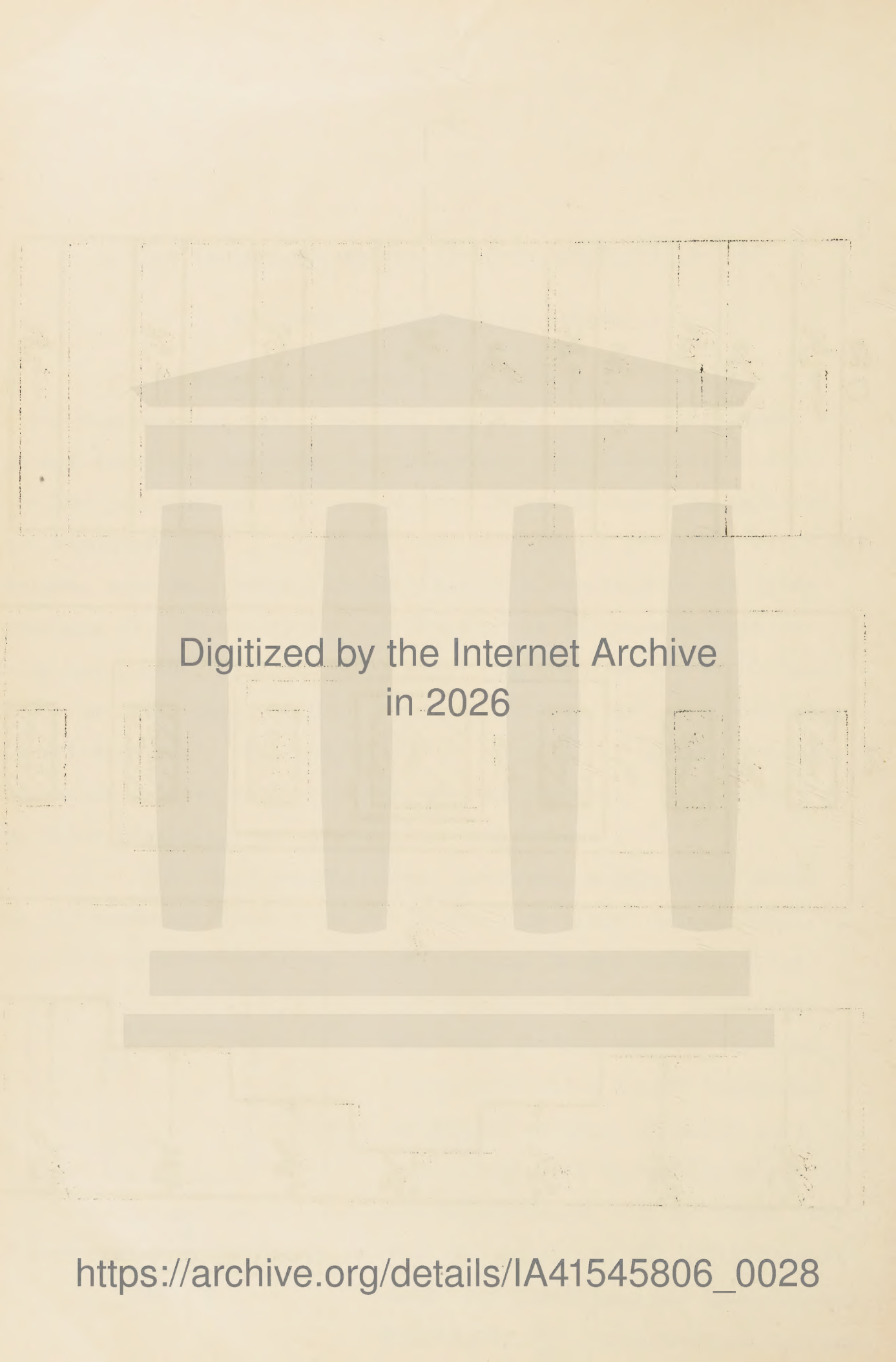


Abb. 2 Vielfachtransformator.


Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545806_0028

im Kern 1 $\mathfrak{L}_1$, in Kern 2 $\mathfrak{L}_2$ usw. Zwischen den Kernen 0 und 1 fließt, erzeugt durch den zeitlich veränderlichen Fluß $\Phi_0 = \mathfrak{L}_0 \cdot q_0$ der Wirbelstrom $\mathfrak{J}_1$, zwischen 1 und 2 der Wirbelstrom $\mathfrak{J}_2$ usw. Alle Vektoren wie $\mathfrak{L}, \mathfrak{H}, \mathfrak{J}, \Phi$ usw. sind in dieser Arbeit Scheitelwerte.

Wird die letzte Kurzschlusswindung 4 aufgeschnitten und an die Klemmen eines Generators gelegt, so ergibt sich für den eingeschwungenen Zustand bei sin=förmiger Erregung das Diagramm Abb.3. Für die innerste Zone 0 wird $\mathfrak{H}_0$ in $\frac{A}{cm}$ (Vektor 01) angenommen. Sie erzeugt die Induktion $\mathfrak{L}_0 = 1{,}25\,\mu\,\mathfrak{H}_0$ (02) und den Teilfluß $\Phi_0 = \mathfrak{L}_0 \cdot q_0$ (03). Φ_0 ruft pro cm den Wirbelstrom $\mathfrak{J}_1$ (04) hervor von der Größe: $\mathfrak{J}_1 = \frac{-j\omega\,\Phi_0\,10^{-8}}{R_1}\,\frac{A}{cm}$. Die Dimension von $\mathfrak{J}_1$ ist $\frac{A}{cm}$, weil sich das ganze Diagramm auf eine Länge von 1 cm bezieht. "Länge" ist dabei die Ausdehnung in Richtung des magnetischen Flusses. $\mathfrak{J}_1$ wirkt magnetisierend auf den Kern 0. Soll dort die Feldstärke $\mathfrak{H}_0$ erhalten bleiben, muss ausserhalb des Wirbelstromes $\mathfrak{J}_1$, im Kern 1 $\mathfrak{H}_1$ (05) herrschen, das der Gleichung entspricht: $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{H}_0$. Aus $\mathfrak{H}_1$ ergibt sich wieder $\mathfrak{L}_1$ (06), aus $\mathfrak{L}_1$ der Teilfluß im Kern 1: $\Phi_{S1} = \mathfrak{L}_1 \cdot q_1$ (07). Φ_{S1} und Φ_0 erzeugen gemeinsam den Wirbelstrom $\mathfrak{J}_2$. Es werde daher $\Phi_{S1} + \Phi_0$ mit Φ_1 (08) bezeichnet, und es muß $\mathfrak{J}_2 = \frac{-j\omega \cdot 10^{-8}}{R_2}\,\Phi_2$ sein, wenn R_2 der Widerstand für den Wirbelstrom $\mathfrak{J}_2$ ist. Aus $\mathfrak{J}_2$ folgt $\mathfrak{H}_2$ (09) nach der Gl: $\mathfrak{H}_2 + \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{H}_1$. Schliesslich ergibt sich aus $\mathfrak{H}_3$ (0 13) der Teilfluß in der letzten Zone Φ_{S3} (12 14). (0 14) stellt dann den gesamten Fluß Φ_4 des geschachtelten Kernes dar. $\mathfrak{H}_3$ selbst muß durch den von der Maschine herrührenden Strombelag $\mathfrak{A}\,\frac{A}{cm}$ erzeugt werden. Senkrecht auf (0 14) steht die aufgedrückte Klemmenspannung $\mathfrak{U}$ (0 15), die gegenüber dem Maschinenstrom (0 13) die Phasenverschiebung φ besitzt. Diese ineinandergeschachtelten Trafos würden also je cm eine Leistung von $\frac{|\mathfrak{U}| \cdot |\mathfrak{A}|}{2} \cos\varphi\,\frac{Watt}{cm}$ verbrauchen.

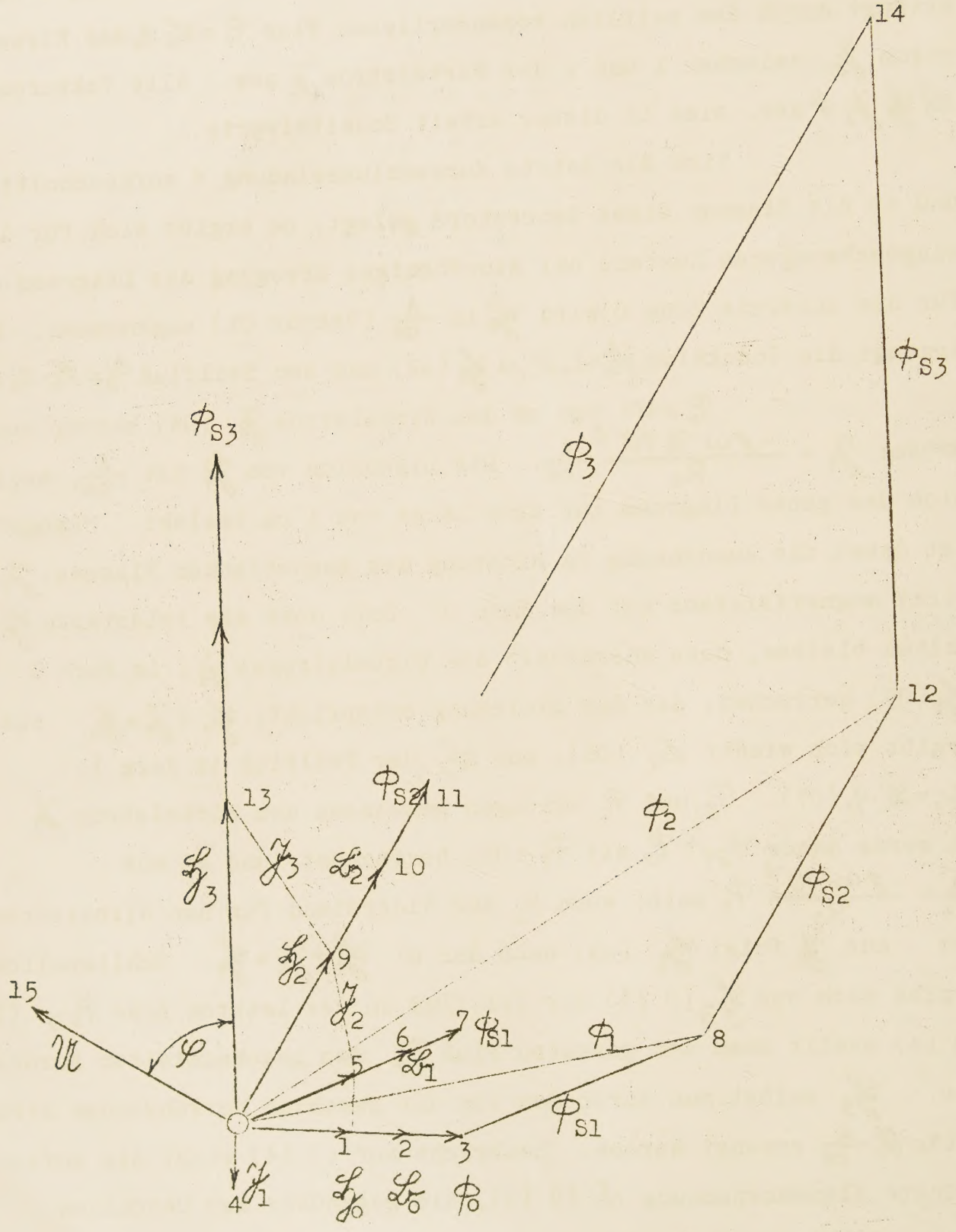

14
Φ_{S3}
Φ_3
Φ_{S3}
12
13
Φ_{S2}
11
Φ_2
$\mathcal{Z}_3$
$\mathcal{Z}_3$
$\mathcal{L}_2$
10
Φ_{S2}
$\mathcal{L}_2$
9
15
$\mathcal{Z}_2$
$\mathcal{U}$
φ
6
7
Φ_{S1}
Φ_1
8
$\mathcal{L}_1$
5
Φ_{S1}
1
2
3
4
$\mathcal{Z}_1$
$\mathcal{L}_0$
$\mathcal{L}_0$
Φ_0

Abb. 3

2. Das Wirbelstromdiagramm bei Eisenblechen.

Das Verfahren des § 1 lässt sich auch anwenden auf Eisenbleche, die längs ihrer Fläche magnetisiert werden. Zu dem Zweck wird die Blechstärke Δ unterteilt in eine Anzahl Zonen. Abb. 4 zeigt zwei von diesen zueinander symmetrischen Zonen zwischen den Teilstrichen n und n+1, bzw. n' und (n+1)'. Die Bedeutung der Buchstaben ist aus der Abb. 4 selbst ersichtlich. So ist z. B. Φ_n der zwischen den Stellen n und n' pulsende Fluß. Die Zonenbreite δ möge so schmal sein, daß mit guter Annäherung zwischen n und n+1 der Induktionsverlauf als geradlinig angesehen werden kann.

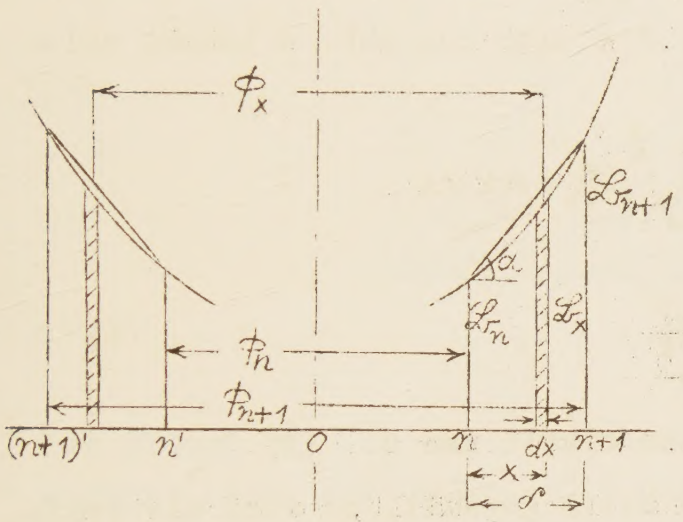


Abb. 4

Dann folgt aus dem Ansatz:

$$\mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}_n + \alpha \cdot x \qquad \text{und} \qquad (1)$$

$$\mathfrak{Y}_{n+1} + \mathfrak{J}_{n+1} = \mathfrak{Y}_n \qquad (2)$$

$$-\mathfrak{J}_{n+1} = j\,\frac{\omega \cdot 10^{-8}}{R_{n+1}}\left(\Phi_n + \frac{\mathfrak{L}_n}{2}\,2\delta\right)\left(\frac{1 + j\,\frac{\mathfrak{C}\delta^2}{3}}{1 + \frac{\mathfrak{C}^2\delta^4}{9}}\right) \qquad (3)$$

In dieser Gl. bedeutet:

$$j = \sqrt{-1}; \quad \omega = 2\pi f; \quad \mathfrak{C} = 0{,}4\,\pi\,\frac{\mu\,\omega}{2\varrho}\,10^{-8}$$

R_{n+1} = Ohmscher Widerstand für den Wirbelstrom

ϱ = spezifischer elektrischer Widerstand in Ωcm.

Der Beweis von Gl. (3) ist kurz folgender: Man errechnet zuerst das unbekannte α aus der Gegenüberstellung der beiden Beziehungen:

$$-\mathfrak{J}_{n+1} = \frac{\alpha\,\delta}{0{,}4\pi\mu} \qquad \text{und} \qquad (4)$$

$$-\mathfrak{J}_{n+1} = j\frac{\omega\cdot 10^{-8}}{2\varrho}\int_0^{\delta}\Phi(x)\,dx \qquad (5)$$

Gl. (4) lässt sich aus der Vereinigung von Gl. (1) und (2) einsehen, und Gl. (5) ist der mathematische Ausdruck für die Zusammenfassung der einzelnen Wirbelstromfäden $-j\frac{\omega 10^{-8}}{2\varrho}\Phi(x)dx$ zwischen n und n+1 zu einem großen Wirbelstrom $\mathfrak{J}_{n+1}$. Wie sich aus Abb. 4 leicht ablesen läßt, ist $\Phi(x)$ selbst:

$$\Phi(x) = \Phi_n + 2\int_0^{x}(\mathfrak{L}_n + \alpha x)\,dx$$

So erhält man für α den Wert:

$$\alpha = j\,C\,\frac{\Phi_n + \mathfrak{L}_n\delta}{1 - j\,C\,\frac{\delta^2}{3}} \qquad (6)$$

Setzt man diesen Wert in (4) ein, so erhält man Gl. (3)

Wird δ hinreichend klein gewählt, so wird die zweite Klammer in (3) nahezu 1. Außerdem ist wegen (1):

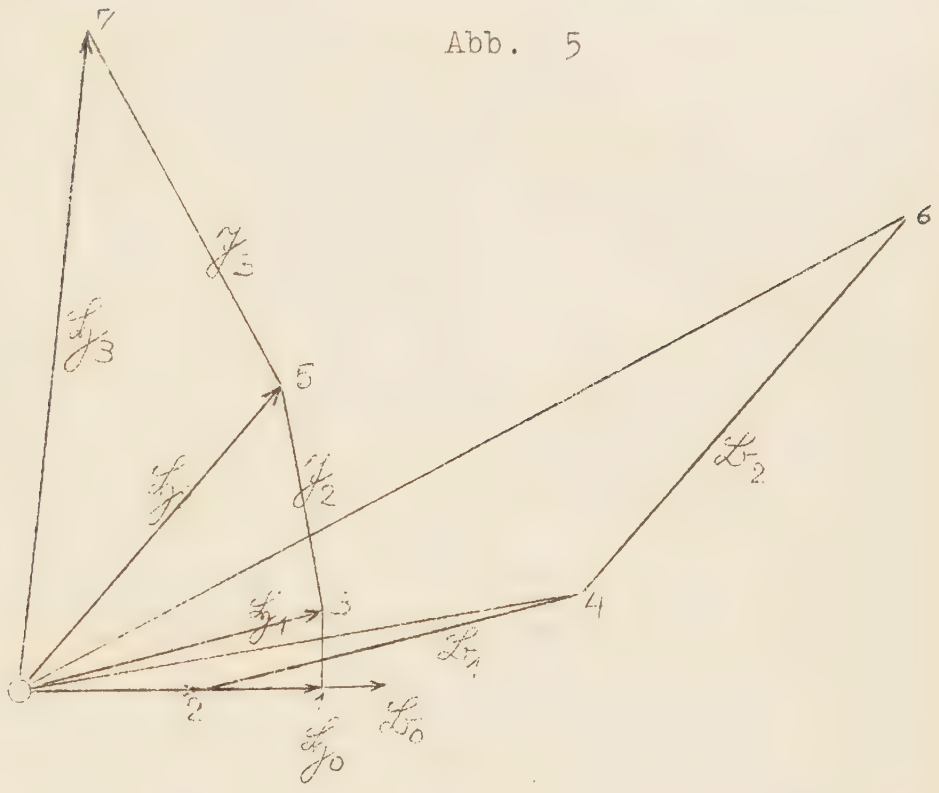
$$\Phi_{n+1} = \Phi_n + \frac{\mathfrak{L}_n + \mathfrak{L}_{n+1}}{2}\,2\delta \qquad (7)$$

so daß wegen (2), (3) und (7) eine sinngemäße Anwendung der Abb. 3 zu folgendem Verfahren führt (Abb. 5).

01 $\mathfrak{L}_{J_0}$		02	$\frac{\mathfrak{L}_0}{2} \equiv \Phi_0^{+)} + \frac{\mathfrak{L}_0}{2}\,2\delta$	13 ⊥ 02 $-\mathfrak{J}_1$
03 $\mathfrak{L}_{J_1}$	24 $\mathfrak{L}_1$	04	$\frac{\mathfrak{L}_0}{2} + \mathfrak{L}_1 \equiv \Phi_1 + \frac{\mathfrak{L}_1}{2}\,2\delta$	35 ⊥ 04 $-\mathfrak{J}_2$
05 $\mathfrak{L}_{J_2}$	46 $\mathfrak{L}_2$	06	$\frac{\mathfrak{L}_0}{2} + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 \equiv \Phi_2 + \frac{\mathfrak{L}_2}{2}\,2\delta$	57 ⊥ 06 $-\mathfrak{J}_3$
07 $\mathfrak{L}_{J_3}$				

+) Φ_0 ist 0 als Fluß zwischen den Stellen 0 und 0', die beide in die Blechmitte zusammenfallen (Abb. 4).

Abb. 5



Die Flüsse Φ_1, Φ_2 usw. werden, wie man sieht, beim Aufbau des Diagrammes nicht gebraucht. Sie sind aber in ihm enthalten als Strahlen nach den Mittelpunkten der Vektoren 24,46 usw.

Bezieht sich die Abb. 5 auf einen Ausschnitt aus dem Blech von 1 cm^2, so ist der Zonenwiderstand

$$R_{n+1} = \varrho \frac{2}{1\,\delta}\ \Omega$$

Die in den Gl. (3) und (7) begründete Mittelwertbildung unterscheidet sich äusserlich etwas von der Krämerschen (Vgl. Dr.=Arbeit von Dipl.=Ing. Krämer, T.H. Braunschweig, Wirbelströme in massivem Eisen). Bei der ersten werden die Flußverkettungen aus ihren einzelnen Komponenten zusammengesetzt, bei der zweiten die Wirbelströme.

3. Das Vektordiagramm der klassischen Theorie und seine Übereinstimmung mit dem des Vielfachtransformators (§ 1).

Das Vektordiagramm Abb. 3 ist abgeleitet worden aus dem Transformatorendiagramm. Dieses beruht seinerseits auf der Anwendung der Maxwellschen Gleichungen. Man muß daher erwarten, daß sich das Wirbelstromdiagramm auch unmittelbar aus den Maxwellschen Gleichungen beweisen läßt, solange μ=const ist, also die Magnetisierungskurve geradlinig verläuft. Das soll im folgenden gezeigt werden.

Aus den beiden Maxwellschen Gleichungen

$$\mathrm{rot}\,\mathfrak{H} = 0{,}4\pi i\,; \qquad \mathrm{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}\,10^{-8}$$

(i = Stromdichte des Wirbelstromes)

ergibt sich beim ebenen Problem als Differentialgleichung des magnetischen Skineffektes:

$$\frac{d^2\mathfrak{L}}{dx^2} = \beta^2\,\mathfrak{L} \tag{8}$$

Dabei ist

$$\beta^2 = 0{,}4\pi\,10^{-8}\,\frac{\omega\mu}{\rho}\,j \tag{9}$$

Aus der Ableitung sei noch die Beziehung erwähnt:

$$-\mu\,0{,}4\pi i = \frac{d\mathfrak{L}}{dx} = \mathfrak{L}' \tag{10}$$

Aus ihr folgt, daß die Wirbelstromfäden Linien gleicher Induktion sind, weil senkrecht zu ihren Bahnen i=0 ist. Diese Erkenntnis wurde bei der Ableitung der Gl. 24, 25 und 26 gebraucht.

Da der Differentialquotient der Grenzwert des Differenzenquotienten ist, kann man schreiben:

$$\mathfrak{L}' \sim \frac{\mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1}{\Delta x}; \qquad \mathfrak{L}'' \sim \frac{\mathfrak{L}_2' - \mathfrak{L}_1'}{\Delta x} \tag{11}$$

Sinngemäß ist der Wirbelstrom $\mathcal{Y} = i \Delta x$ zu setzen, so daß sich aus (10) ergibt:

$$- \mu 0{,}4\pi \mathcal{Y} = \mathfrak{L}' \Delta x \qquad (12)$$

Da nach (11)

$$\mathfrak{L}_{n+1} = \mathfrak{L}_n + \Delta x \, \mathfrak{L}'_{n+1}; \qquad \mathfrak{L}'_{n+1} = \mathfrak{L}'_n + \Delta x \, \mathfrak{L}''_{n+1} \qquad (13)$$

und nach (8)

$$\mathfrak{L}'_{n+1} = \mathfrak{L}'_n + \Delta x \, \beta^2 \mathfrak{L}_n \quad \text{ist,} \qquad (14)$$

ergibt sich folgendes Diagramm (Abb. 6):

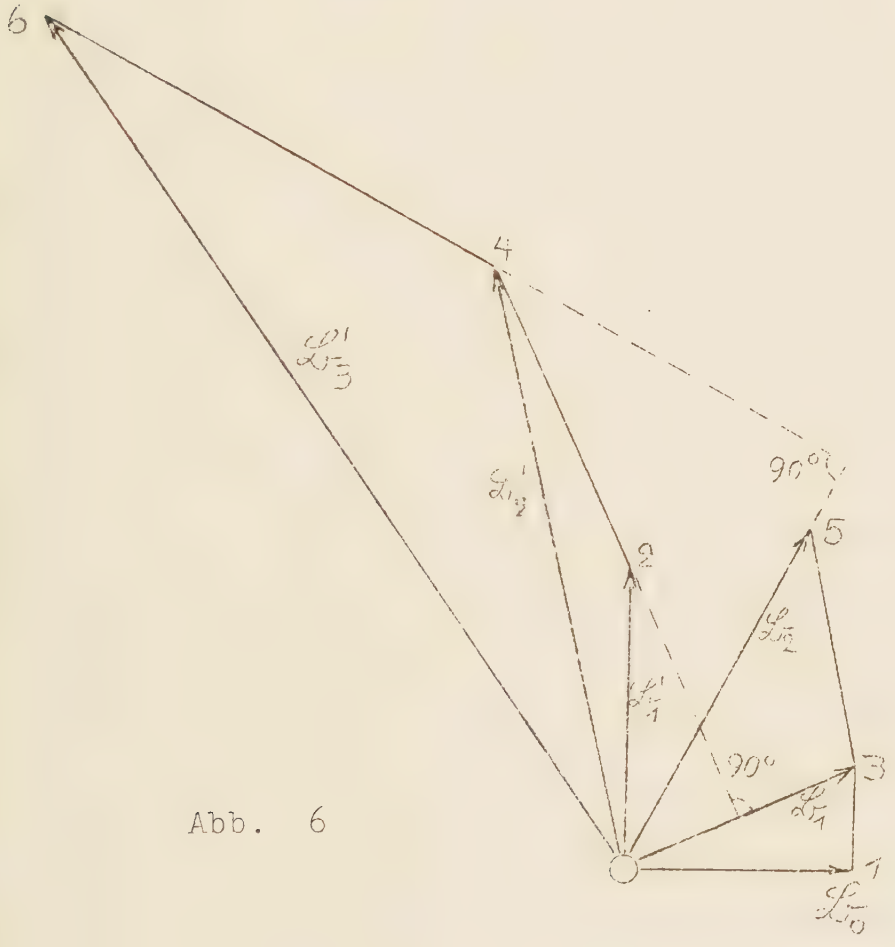


Abb. 6

Der Nullpunkt der x=Achse wird gerade in die Blechmitte gelegt. Infolgedessen muß für x=0

$$\mathfrak{L}'_0 = \left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}\right)_{x=0} = 0$$

sein, weil die Induktionskurve symmetrisch zur Mittellinie verläuft, und sie daher in der Mitte ein Minimum hat. Die Induktion selbst sei in der Mitte zu $\mathfrak{L}_0$ (01) angenommen.

Dann folgt aus (14) der Wert von $\mathfrak{L}'$ für die Stelle 1

$$\mathfrak{L}'_1 = \Delta x \, \beta^2 \mathfrak{L}_0$$

Da β^2 mit dem Faktor j behaftet ist, muß $\mathfrak{L}'_1$ senkrecht auf $\mathfrak{L}_0$ stehen (Abb. 6, Vektor (02)$\perp$(01)). Jetzt ergibt sich $\mathfrak{L}_1$ (03) aus (13): $\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_0 + \Delta x \, \mathfrak{L}'_1$

Nach (14) wird jetzt: $\mathfrak{L}_2' = \mathfrak{L}_1' + \Delta x \beta^2 \mathfrak{L}_1$

Vektor: 04 = 02 + 24 $\quad$ 24 $\perp$ 03

Nach (13): $\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_1 + \Delta x \mathfrak{L}_2'$

05 = 03 + 35 $\quad$ 35 $\parallel$ 04

Würde man jetzt an den Vektor (04) senkrecht zu $\mathfrak{L}_2$ den Vektor (46) = $\Delta x \beta^2 \mathfrak{L}_2$ antragen, so erhielte man in (06) $\mathfrak{L}_3'$. So wiederholt sich das Wechselspiel, bis man an den Rand kommt.

Dieses Vektordiagramm ist nun im Grunde dasselbe wie in Abb. 3. Denn dividiert man die Vektoren (01), (03), (05) usw. in Abb. 6 durch $\mu 0{,}4\pi$, so erhält man $\mathfrak{J}_0$, $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ usw. Das sind die Strahlen (01), (05), (09) in Abb. 3. Ferner geht über:

Strahl (13) in Abb. 6 in Strahl (15) von Abb. 3

Strahl (35) in Abb. 6 in Strahl (59) von Abb. 3

Weil die Strahlen (13), (35) usw. in Abb. 6 immer den Wert $\Delta x \mathfrak{L}'$ darstellen, der nach (12) - $\mu 0{,}4\pi \mathfrak{J}$ ist. Werden diese Vektoren also auf das $\frac{1}{\mu\, 0{,}4\pi}$ fache gekürzt, so bleibt nur $\mathfrak{J}$ übrig. Das sind aber die Vektoren (15), (59) usw. in Abb. 3.

Ebenso erkennt man, daß der Linienzug 0 2 4 6 in Abb.6 dem Zug 0 3 8 12 14 in Abb. 3 entspricht. Denn der letzte ist nach § 1: $q(\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \ldots)$ und der erste ist: $\Delta x \beta^2 (\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2 + \ldots)$

Diese beiden Linienzüge müssen um 90° gegeneinander verschoben sein, weil β^2 nach (9) mit dem Faktor j behaftet ist.

Der Weg über das Vektordiagramm des geschachtelten Transformators führt also zu demselben Ergebnis wie die Rechnung nach der klassischen Theorie. Ja, man kann sagen:

Das Transformatorendiagramm Abb. 3 ist eine graphische Lösung der komplexen Differentialgleichung von der Form: $\frac{d^2\mathfrak{L}}{dx^2} = f(\mathfrak{L})\mathfrak{L}$, wobei $f(\mathfrak{L})$ eine komplexe Funktion von $\mathfrak{L}$ sein darf.

4. Das Verfahren bei starker Sättigung und Hysteresis.

Zweck der Konstruktion nach § 2 ist nicht der, die Rechnung zu ersetzen, wo diese brauchbar ist, sondern dort einzuspringen, wo man wegen anderer Schwierigkeiten wie Hysteresis, Sättigung usw. zu einem graphischen Verfahren greifen muß.

a. Sättigung.

Um die Krümmung der Magnetisierungskurve und die Sättigung zu berücksichtigen, ermittelt man aus einem gefundenen $\mathfrak{H}$=Wert das zugehörige $\mathfrak{L}$ n i c h t nach der Gl: $\mathfrak{L} = 0{,}4\pi\mu\mathfrak{H}$, sondern mit Hilfe einer "dynamischen" Magnetisierungskurve (d. M. K.).

Man erhält sie nach Dreyfus, Ollendorf usw. auf folgende Weise:

Aus der mit Gleichstrom aufgenommenen M.K. und der Gl. $H(t) = \overline{H} \sin \omega t$ ermittelt man den zeitlichen Verlauf von B(t) und nach Fourier die zugehörige Grundwelle, deren Scheitelwert $\overline{B}$ sei. Dann ist $\overline{B} = f(\overline{H})$ die d. M. K.

b. Hysterese.

Man ermittelt aus den Hysteresisschleifen zunächst genau so wie unter a. die d. M. K. Um die Magnetisierungsarbeit F in Joule je cm^3 und Zyklus (Fläche der Hysteresisschleife) zu erfassen, wird sie in bekannter Weise durch eine Wirkkomponente $I_h \frac{A}{cm}$ ausgedrückt nach der Gl: $\overline{I}_h = \frac{F}{\pi\, 10^{-8}\ \overline{B}} \frac{A}{cm}$

Beim Aufbau des Vektordiagrammes Abb. 5 ändert sich nur die Phasenverschiebung zwischen $\overline{\mathfrak{H}}$ und $\overline{\mathfrak{L}}$.

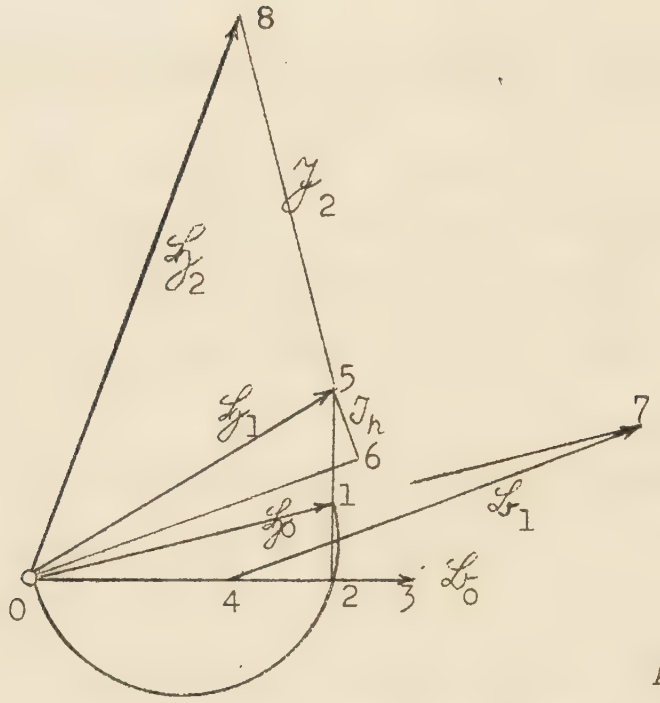


Abb. 7

Die Abb. 7 möge die Anwendung zeigen:

01 $\mathfrak{L}_{\mathfrak{J}_0}$ (angenommen)

12 $\bar{I}_{h0}$ aus der Hysteresisverlustkurve entnommen. Punkt 2 muß auf dem Halbkreis über 01 liegen.

02 gibt die Richtung von $\mathfrak{L}_0$ an. Der Betrag von $\mathfrak{L}_0$ wird der

03 $\mathfrak{L}_0$ / d. M. K. entnommen.

04 $\frac{\mathfrak{L}_0}{2}$ entspricht 02 der Abb. 5

15 ⊥ 04 $-\mathfrak{J}_1$ entspricht 13 in Abb. 5

05 $\mathfrak{L}_{\mathfrak{J}_1}$ Dazu wird aus der d. M. K. und aus der $\bar{I}_h$=Kurve $\bar{I}_{h1}$ und $\mathfrak{L}_{r_1}$ entnommen.

56 $\bar{I}_{h1}$ Punkt 6 liegt auf dem Halbkreis über 05.

47 ∥ 06 $\mathfrak{L}_{r_1}$

58 ⊥ 07 $-\mathfrak{J}_2$ entspricht 35 in Abb. 5

08 $\mathfrak{L}_{\mathfrak{J}_2}$ usw.

5. Berücksichtigung der Kreis= und Rechtecksform.

Im § 2 ist das graphische Verfahren angewendet auf blechförmige Gebilde. Um es auch für die beiden wichtigsten Fälle des kreisförmigen und rechteckigen Querschnitts anwenden zu können, ist noch folgendes zu beachten:

a. Kreisform.

In § 2 haben die Wirbelstromfäden an den Stellen n und n+1 (Abb. 4) ein und denselben elektrischen Widerstand zu überwinden wegen der unendlich großen Ausdehnung in der Blechebene. Bei dem kreisförmigen Querschnitt dagegen steigt der Widerstand mit dem Radius der Kreisbahn des Wirbelstromes. Es muß daher für die Stromfäden zwischen n und n+1 (Abb. 4) ein mittlerer Widerstand R_{n+1} angesetzt werden. Er hat den besonderen Wert:

$$R_{n+1} = \frac{\varrho \cdot \pi^2}{q} (r_{n+1} + r_n)^2 \qquad (15)$$

wenn man die Teilkreise so wählt, daß einander flächengleiche Ringzonen entstehen von der Fläche q cm^2.

b. Rechteckiger Querschnitt.

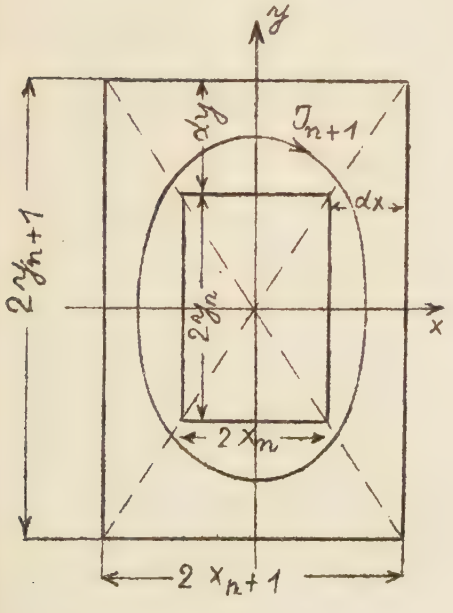


Abb. 8

Beim rechteckigen Querschnitt kann man zunächst nichts über den Verlauf der Wirbelströme aussagen. Da es sich bei dieser Arbeit nicht um die Lösung dieses mathematischen Problems handelt, sondern vielmehr darum, hinreichend genaue und zuverlässige Werte für die Wirbelstromverluste zu bekommen, wird man sich damit begnügen können, den ellipsenförmigen Verlauf der Wirbelströme zu ersetzen durch den rechteckigen (Abb. 8). Dabei kann man zweifeln, ob die Rechtecke der Stromlinien

ähnlich sind dem Umrandungsrechteck, oder ob die Abstände dy und dx einander gleich sind. Bei sehr stark ausgeprägter Hautwirkung wird das letzte der Fall sein. Sonst das erste. Es sei zunächst angenommen, die Kraftlinienverdrängung sei nur mäßig, also die Stromlinienrechtecke geometrisch ähnlich dem Randrechteck.

Unterteilt man den Querschnitt wieder so, daß jede der entstehenden Zonen q cm^2 groß wird, so wird der Zonenwiderstand R_{n+1} für den Wirbelstrom $\mathcal{Y}_{n+1}$:

$$R_{n+1} = 8\,\varrho\,(x_{n+1}+x_n)^2 \cdot \frac{1+m^2}{q} \qquad (16)$$

wobei $m = \frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ ist.

6. Konstruktion von halbaußen an.

Das graphische Verfahren soll, wie bereits im § 4 erwähnt, nur dort angewendet werden, wo die strenge Theorie nicht mehr möglich ist, weil der geradlinige Teil der Magnetisierungskurve überschritten ist. Dieses Überschreiten des geradlinigen Teiles erfolgt in der Regel erst halbaußen. Es ist daher ratsam, auch erst von halbaußen an das Vektordiagramm zu zeichnen. Man nimmt an der Ausgangsstelle willkürlich einen $\mathfrak{L}$ =Wert an, errechnet nach den Regeln der klassischen Theorie den zugehörigen Fluß nach Betrag und Phase und beginnt mit diesem Ausgangswertepaar die Zeichnung. Die wichtigsten Formeln sind folgende:

a. Ebenes Problem.

Induktionsverteilung über den Querschnitt: $\mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}_0 \mathfrak{Cof}\,\beta x$ (17)

Fluß zwischen den Stellen +x und -x: $\Phi(x) = 2\,\frac{\mathfrak{L}_0}{\beta}\,\mathfrak{Sin}\,\beta x$ (18)

Dabei ist: $\mathfrak{L}_0$ = Induktion in der Blechmitte (x=0).

$$\beta = \sqrt{0{,}4\,\pi\,10^{-8}\,\frac{\mu\,\omega}{\varrho}\,j} \qquad (19)$$

b. Zylindrisches Problem.

Induktionsverteilung über den Querschnitt: $\mathfrak{L}(r) = \mathfrak{L}_0 I_0(\beta r)$ (20)

Fluß innerhalb des Kreises r: $\Phi(r) = \mathfrak{L}_0 \frac{2\pi r}{\beta} I_1(\beta r)$ (21)

Dabei ist: $\mathfrak{L}_0$ = Induktion in der Kreismitte (r=0)

$I_{0,1}$ = Besselsche Funktion nullter, bzw. 1. Ordnung

$$\beta = \sqrt{-0{,}4\pi\, 10^{-8}\, \frac{\mu\,\omega}{\varrho}\, j} \qquad (22)$$

c. Rechteckiger Querschnitt.

Macht man bezüglich des Stromlinienverlaufes die Annäherungsannahmen § 5b, Abb. 8, so erhält man entsprechend:

$$\mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}_0 I_0(\beta x) \qquad (23)$$

$$\Phi(x) = \mathfrak{L}_0 \frac{4b}{\beta} I_1\left(\beta \frac{a}{2}\right) \qquad (24)$$

$$= \sqrt{-0{,}4\pi 10^{-8}\, \frac{\omega\mu}{\varrho}\, \frac{2b^2}{a^2+b^2}\, j} \qquad (25)$$

Dabei ist a die Rechteckseite in der x=Richtung, b die in der y=Richtung.

Bei Mangel an ausreichenden Funktionstafeln für I_0 und I_1 bedient man sich vorteilhaft der Zennekschen Darstellungsweise (Vgl. Zennek, Elektrischer und magnetischer Widerstand, Annalen der Physik Bd. 11,4). Den Gl. (23) bis (25) entspricht dann der Wert

$$K = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}\, 10^{-9}\, \frac{\mu\,\omega}{\varrho}\, \frac{2b^2}{a^2+b^2}} \qquad (26)$$

d. Stark ausgeprägte Hautwirkung.

Bei sehr stark ausgeprägter Hautwirkung ist nach der Theorie die Form des Querschnittes ohne Belang. Es besteht dann zwischen dem Umfang u des Querschnitts, dem Fluß Φ durch den Querschnitt und dem Strombelag $\mathfrak{A}$ die Beziehung:

$$\Phi = \sqrt{\frac{0{,}4\pi}{10^{-8}}\, \frac{\mu\,\varrho}{\omega}}\; u\; e^{-45^0 j}\, \mathfrak{A} \qquad (27)$$

7. Bemerkungen über die ausgeführten Vektordiagramme.

Zur Ausführung der vorstehend abgeleiteten Vektordiagramme wurden aus Gründen der Genauigkeit große Zeichenbögen verwendet. Diese konnten wegen der hohen Kosten in den Druck nicht übernommen werden. Die Schriftzahl beim Aufbau der Diagramme wurde verschieden gewählt je nach der Höhe der Frequenz, der Größe des Querschnittes und der Größe des linearen Bereiches der Magnetisierungskurve. Sie schwankte zwischen 5 und 10 und wurde nach den Richtlinien des § 6 bestimmt, um mit möglichst wenig Schritten hinreichende Genauigkeit zu erzielen.

Aus einem der durchgeführten Diagramme wurde die Abb. 9 gewonnen. Sie zeigt, wie sich die Induktion über den Querschnitt verteilen würde, wenn μ konstant wäre (Kurve 2), und wie sie in Wirklichkeit wegen der Krümmung der Magnetisierungskurve verläuft (Kurve 1). Es handelt sich in der Abb. 9 um einen sehr dünnen Eisendraht mit einem Durchmesser von nur 0,0124 cm, der einem Hochfrequenzfeld ($f = 10^6$ Hz) ausgesetzt wird. Die Magnetisierungskurve weist im Anfang auf ein $\mu = 1120$ hin, biegt aber ab bei einer Feldstärke von rd. 9,5 $\frac{A}{cm}$ (B = 12000 Gauss). Der spez. Widerstand war $\varrho = 1{,}304\ 10^{-5}\ \Omega cm$.

8. Form und Material des untersuchten Eisens.

Das zeichnerische Verfahren der Verlustberechnungen wurde durch Messungen an drei Ringen erprobt.

Die Abmessungen der drei Ringe sind aus Abb. 10 zu ersehen.

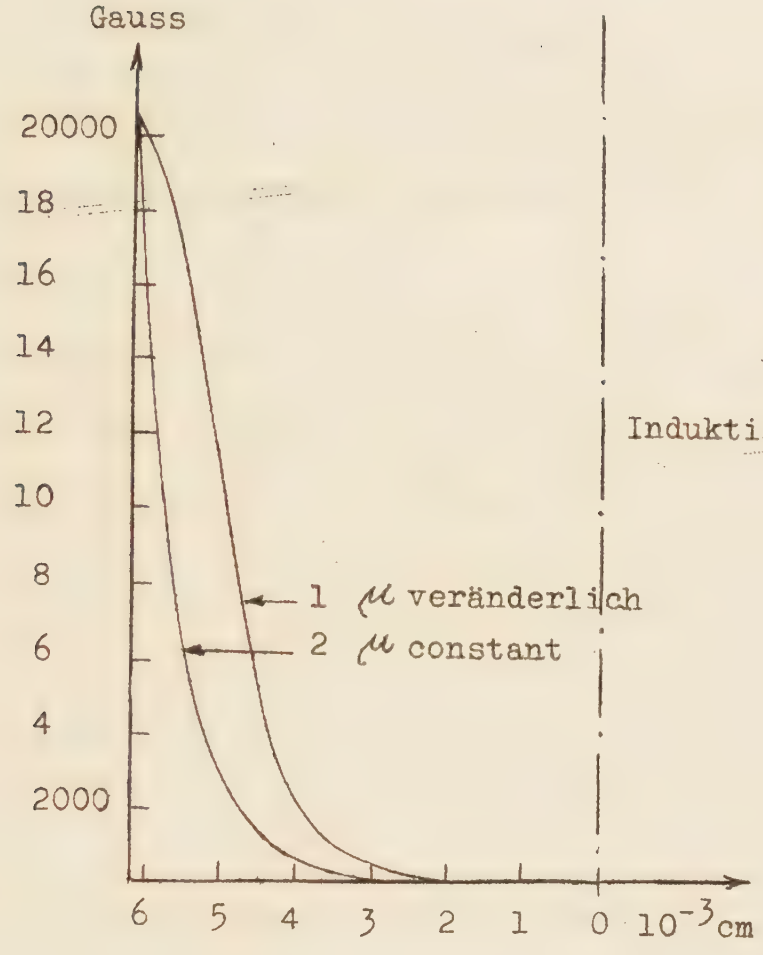


Abb. 9

Induktionsverteilung

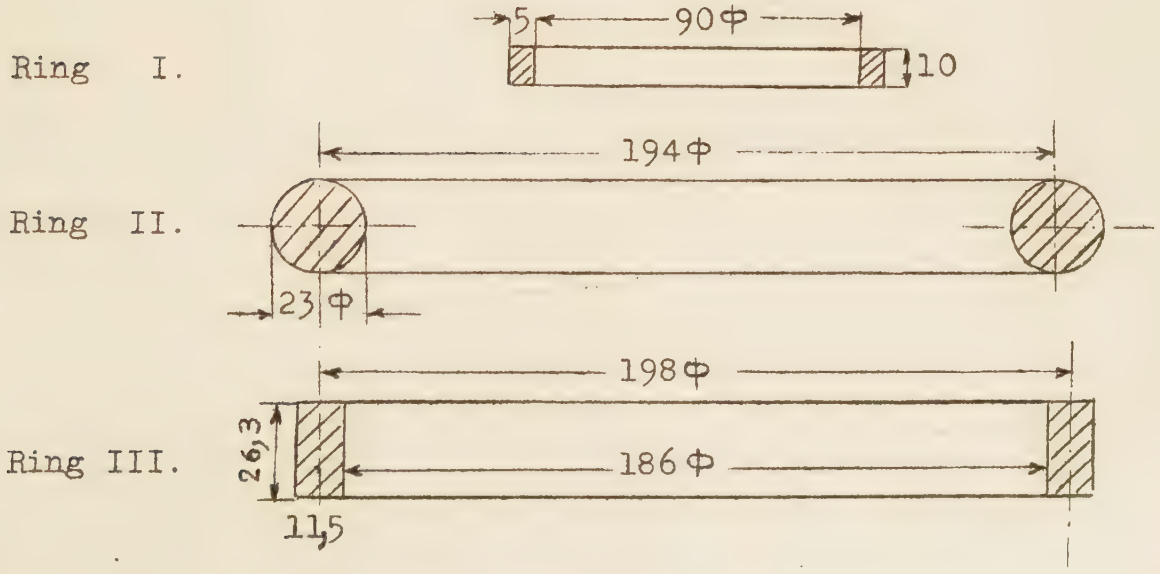


Abb. 10

Ausserdem sind die folgenden Angaben kennzeichnend:

Ring	Material	$\bar{B} = f(\bar{H})$ Vgl. §4	$\bar{I}_h = f(\bar{B})$ Vgl. §4	ϱ Ωcm	Windungszahl	Windgsz. je cm.
I	Schmiedeeisen	Abb. 11	Abb. 11	$1{,}77\ 10^{-5}$	1033	34,6
II	Guß-	Abb. 12	Abb. 13	$8{,}35\ 10^{-5}$	679	11,15
III	eisen				385	6,2

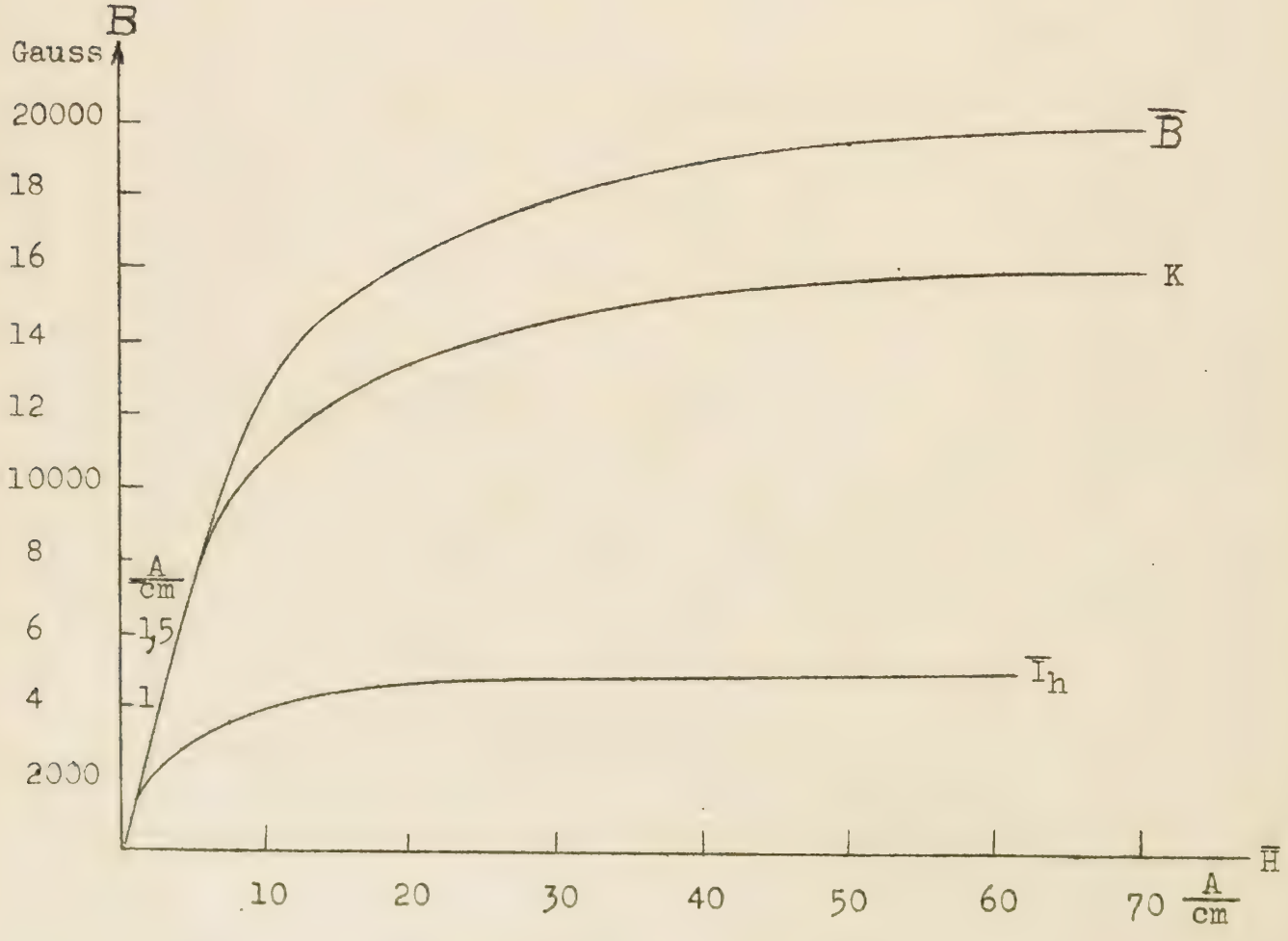


Abb. 11 Magnetisierungskurven.

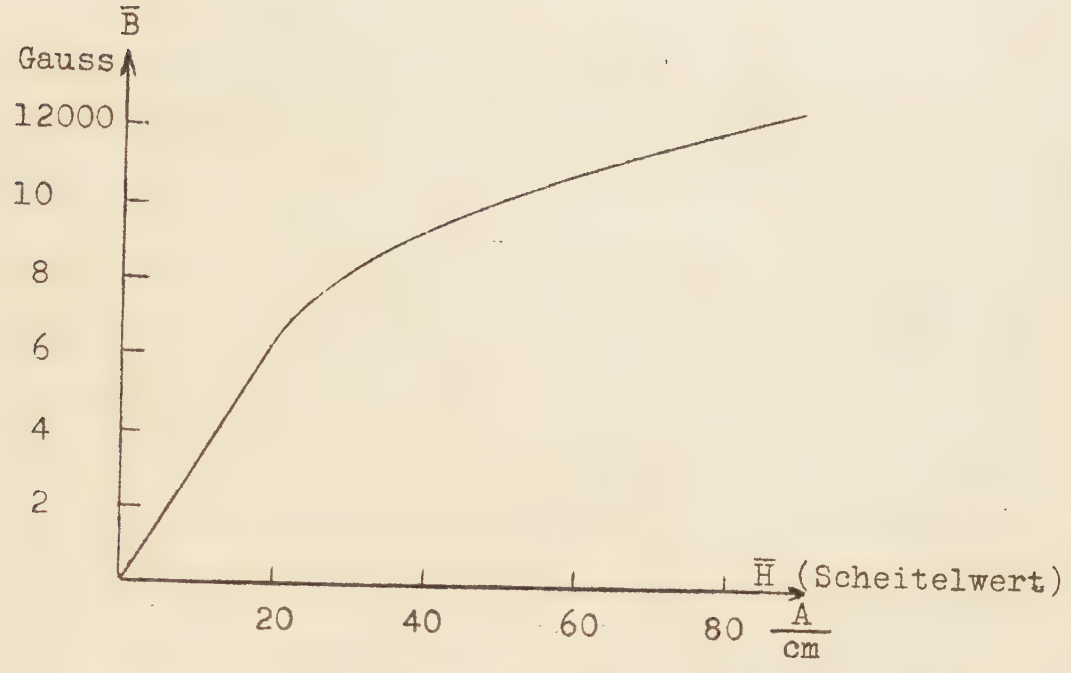


Abb. 12 Magnetisierungskurve für Wechselstrom (Gußeisen)

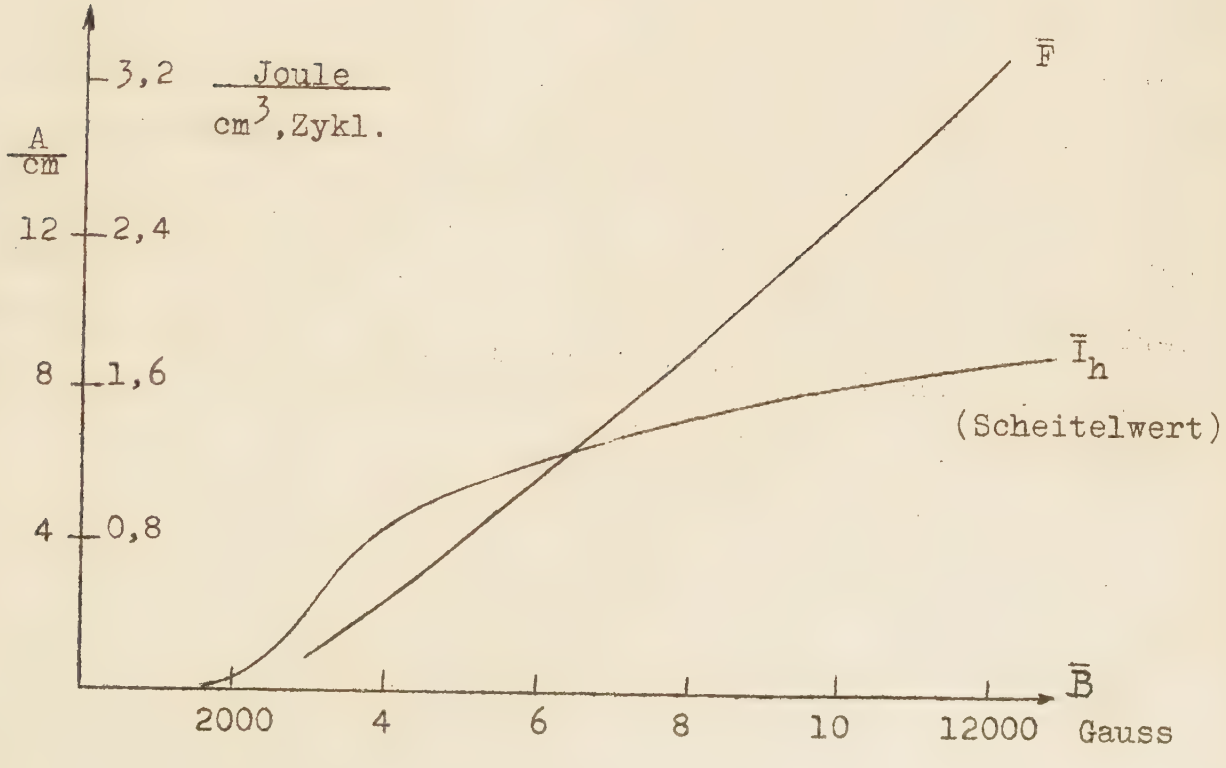
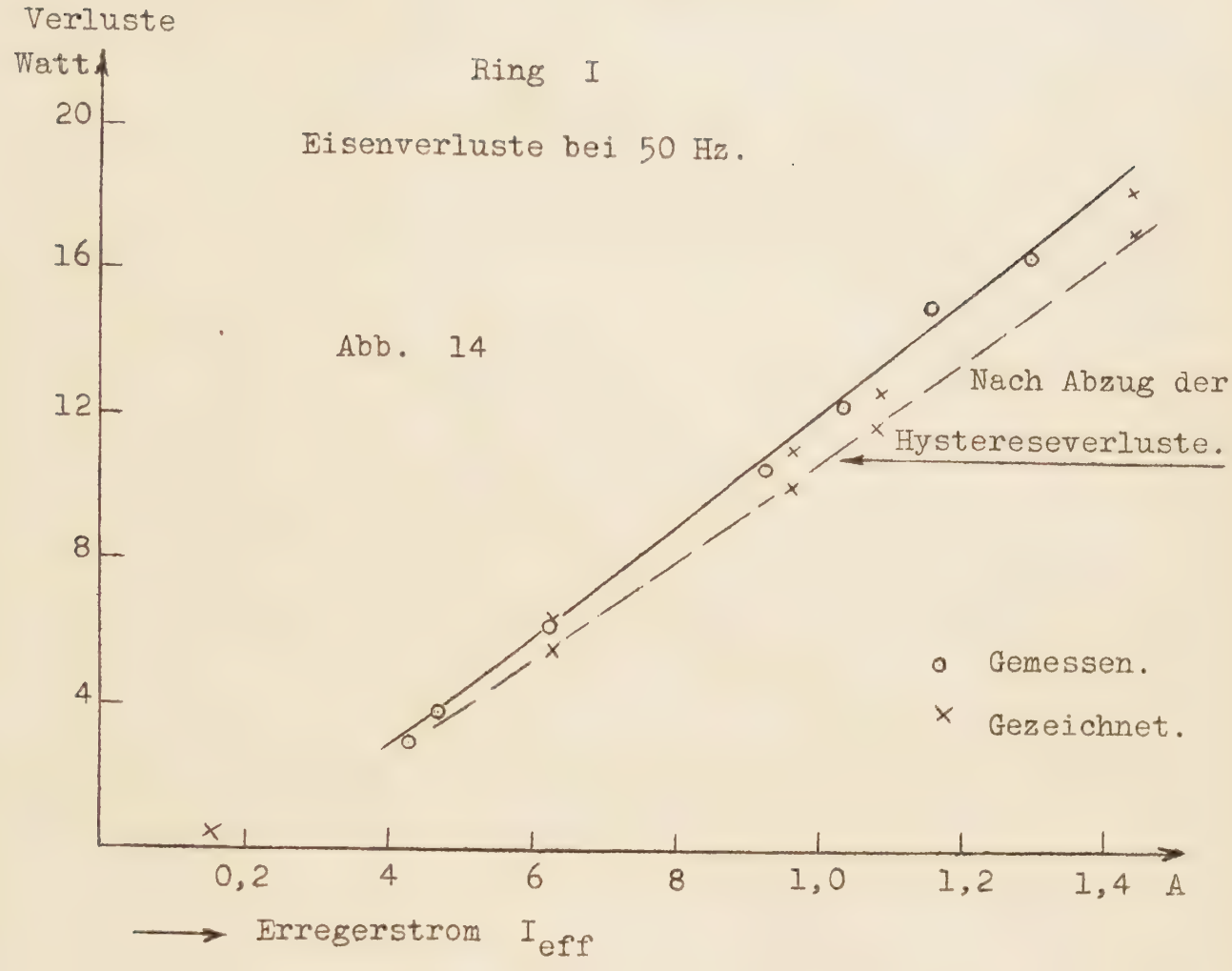


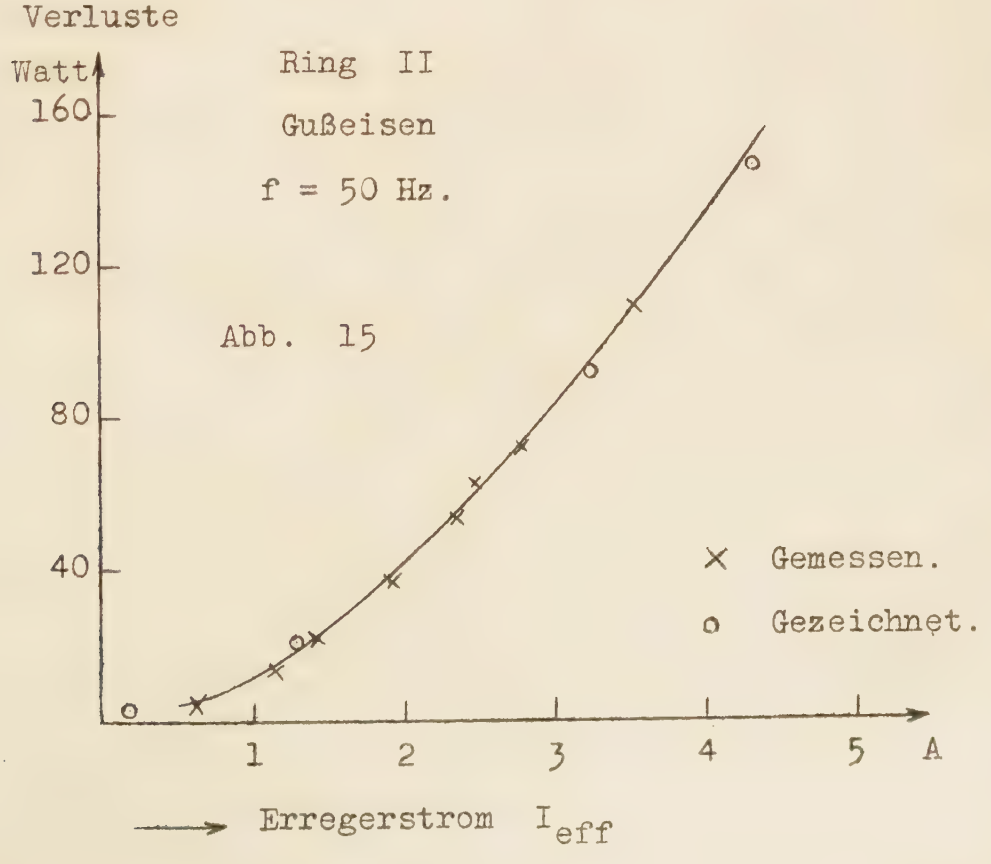
Abb. 13 Hysteresisverluste (Gußeisen).

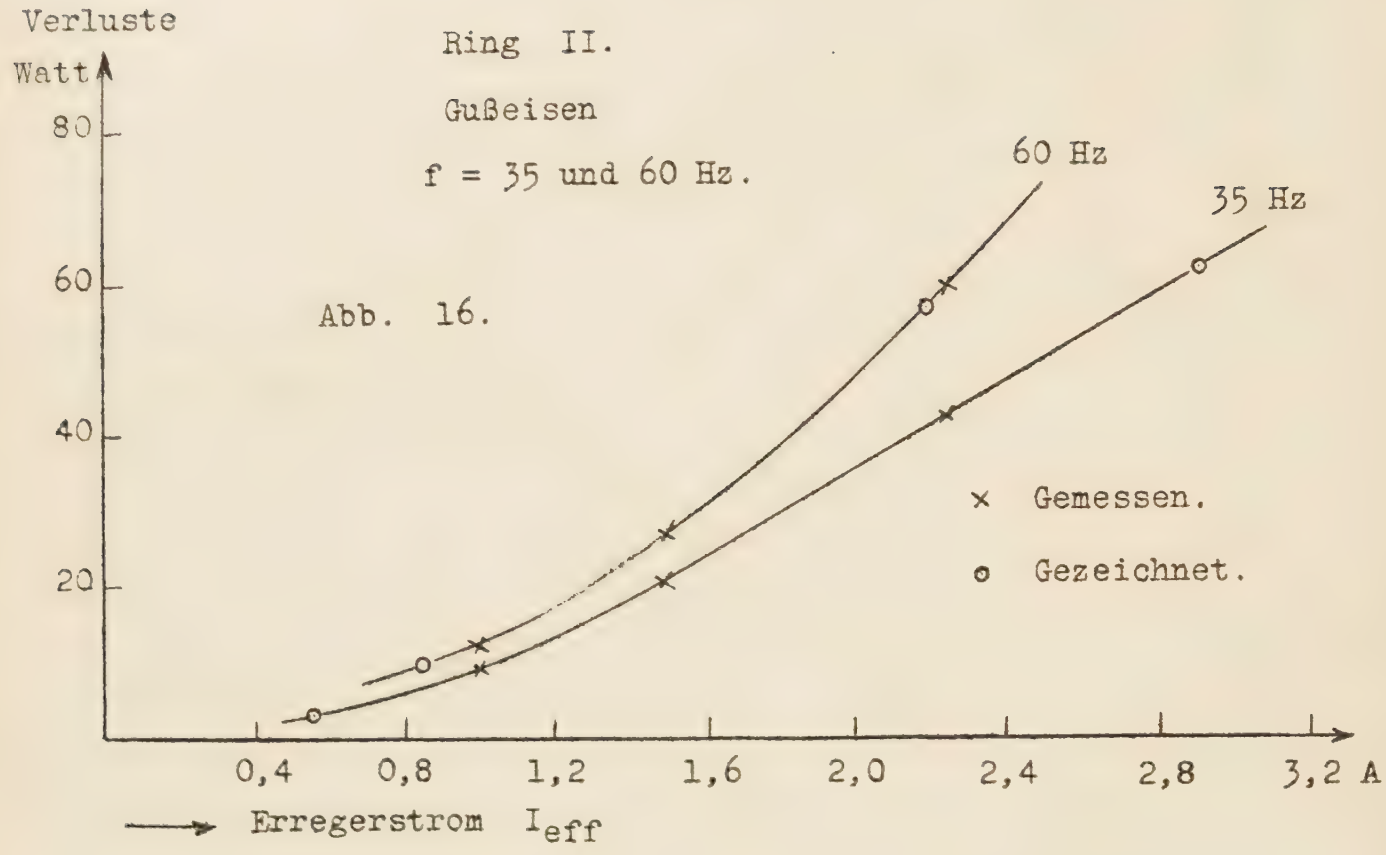
9. Untersuchung bei niedrigen Frequenzen.

Die Eisenverluste wurden mit Hilfe eines Dynamometers gemessen. Abb. 14 zeigt die Verluste des Ringes I bei 50 Hz. Die graphische Darstellung lieferte die durch Kreuze angegebenen Werte. Sie gestattet auch die reinen Hysteresisverluste zu ermitteln, da die Induktionen in den einzelnen Zonen bekannt sind. So gibt die gestrichelte Linie die reinen Wirbelstromverluste an. Die Abweichung der gemessenen Werte von den durch Zeichnung gefundenen beträgt rd. 5%. Man erkennt auch die Wirkung des Magnetisierungsknikkes: Nach der klassischen Theorie müßten die Verluste ungefähr in Form einer Parabel ansteigen. Der Parabelast wird aber so weit abgebogen, daß er zu einer geraden Linie wird.

Abb. 15 bis 19 zeigen die Ergebnisse bei Gußeisen (Ring II und III) bei 35, 50 und 60 Hz. In Abb. 17 sind die Eisenverluste bei konstantem Strom in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen. Nach der Theorie müssen die Kurven angenähert den Verlauf von $\sqrt{f}$ haben. Diese Gesetzmäßigkeit ist durch die gestrichelte Linie angedeutet. Die gemessenen Werte sind durch stark ausgezogene Linien miteinander verbunden.


Verluste
Watt
Ring I
Eisenverluste bei 50 Hz.
20
16
12
8
4
Abb. 14
Nach Abzug der
Hystereseverluste.
o Gemessen.
× Gezeichnet.
0,2
4
6
8
1,0
1,2
1,4 A
Erregerstrom I_{eff}


Verluste
Watt
Ring II
Gußeisen
f = 50 Hz.
160
120
80
40
Abb. 15
× Gemessen.
o Gezeichnet.
1
2
3
4
5 A
Erregerstrom I_{eff}



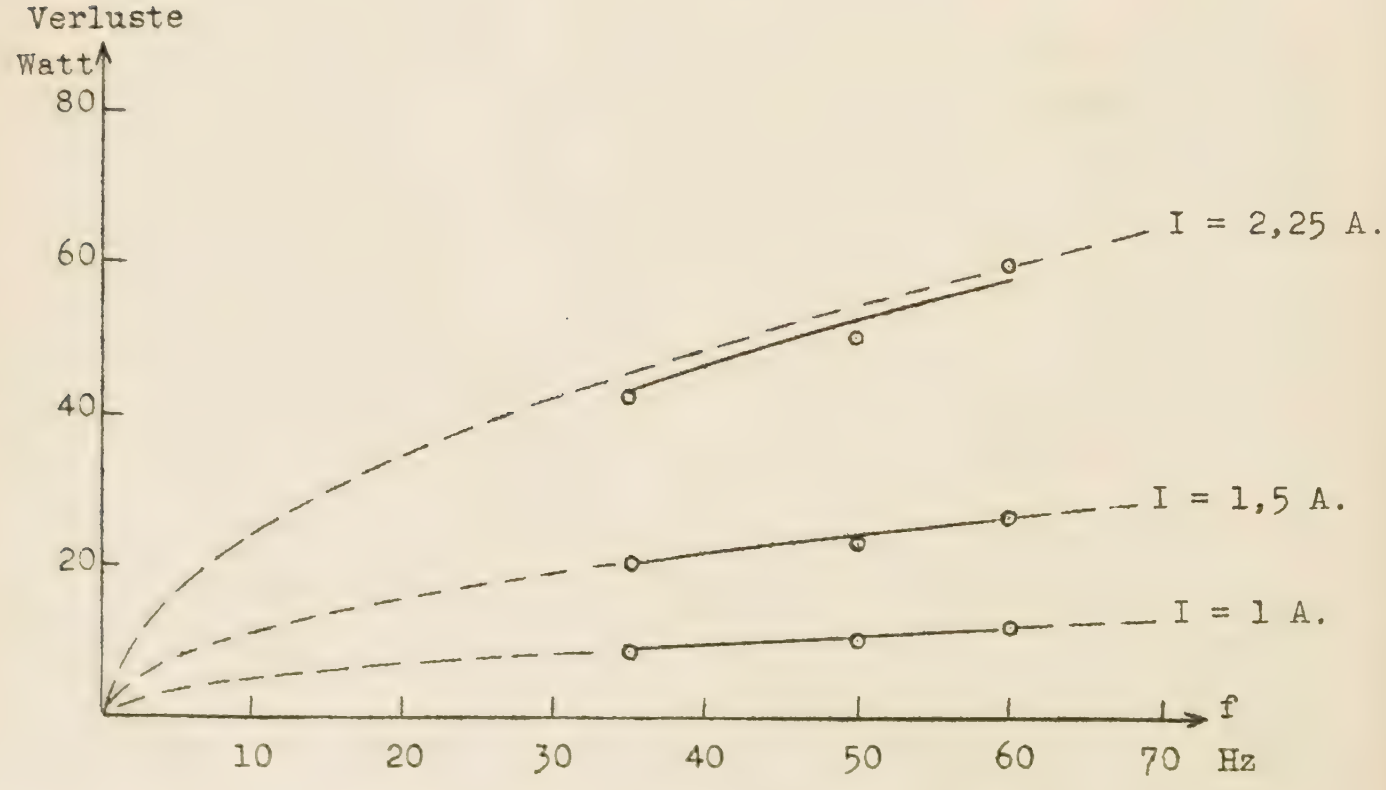
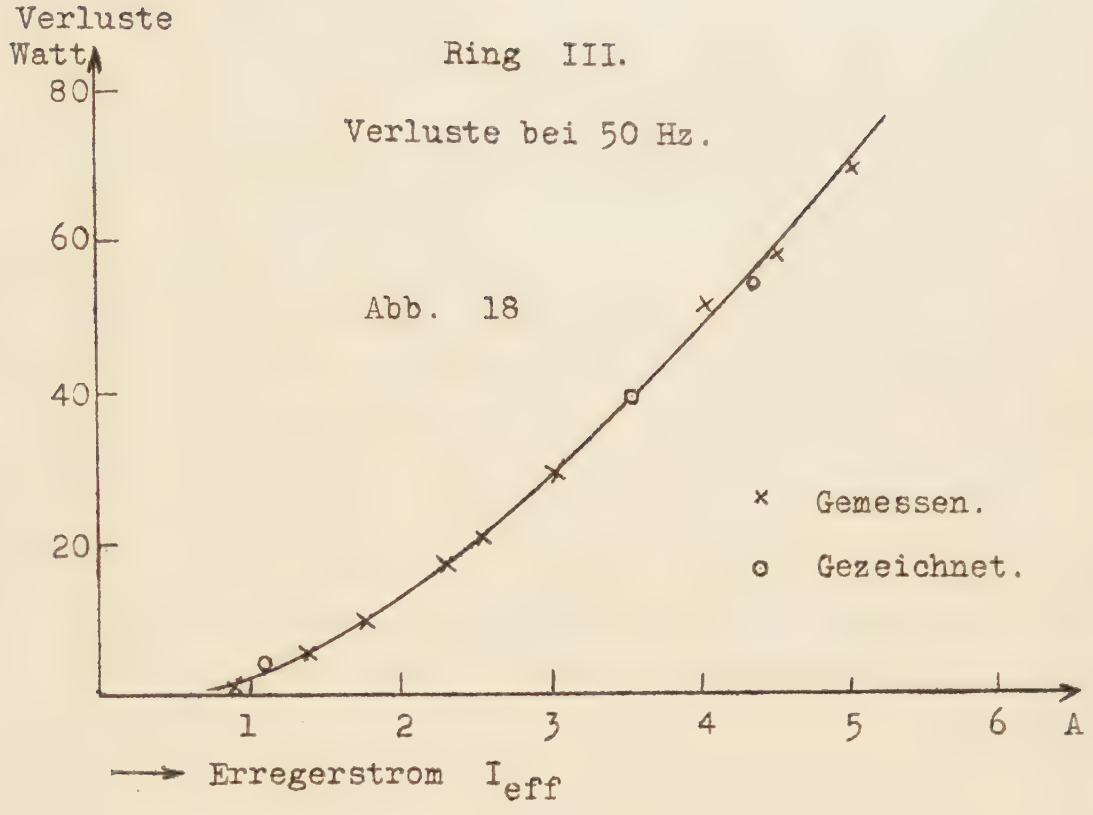
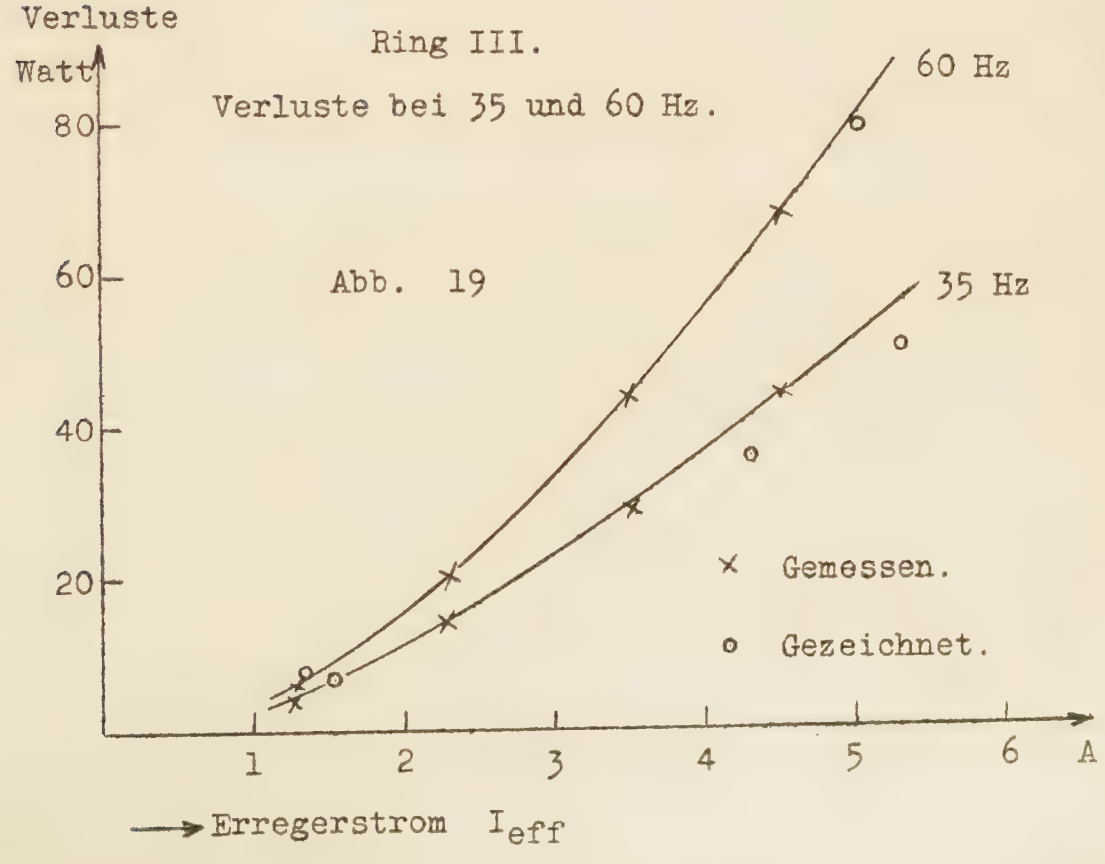


Abb. 17 Eisenverluste bei constantem Strom


Verluste
Watt
Ring III.
Verluste bei 50 Hz.
Abb. 18
80
60
40
20
× Gemessen.
o Gezeichnet.
1
2
3
4
5
6
A
Erregerstrom I_{eff}


Verluste
Watt
Ring III.
Verluste bei 35 und 60 Hz.
Abb. 19
60 Hz
35 Hz
80
60
40
20
× Gemessen.
o Gezeichnet.
1
2
3
4
5
6
A
Erregerstrom I_{eff}

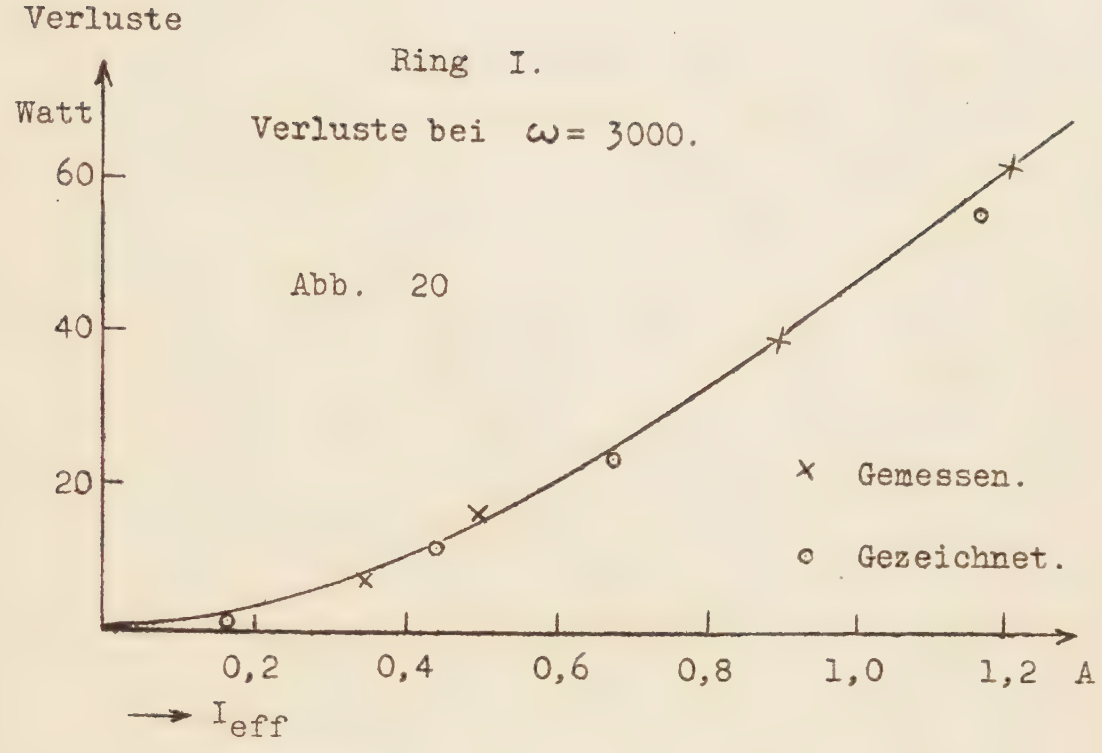
10. Untersuchung bei Tonfrequenz.

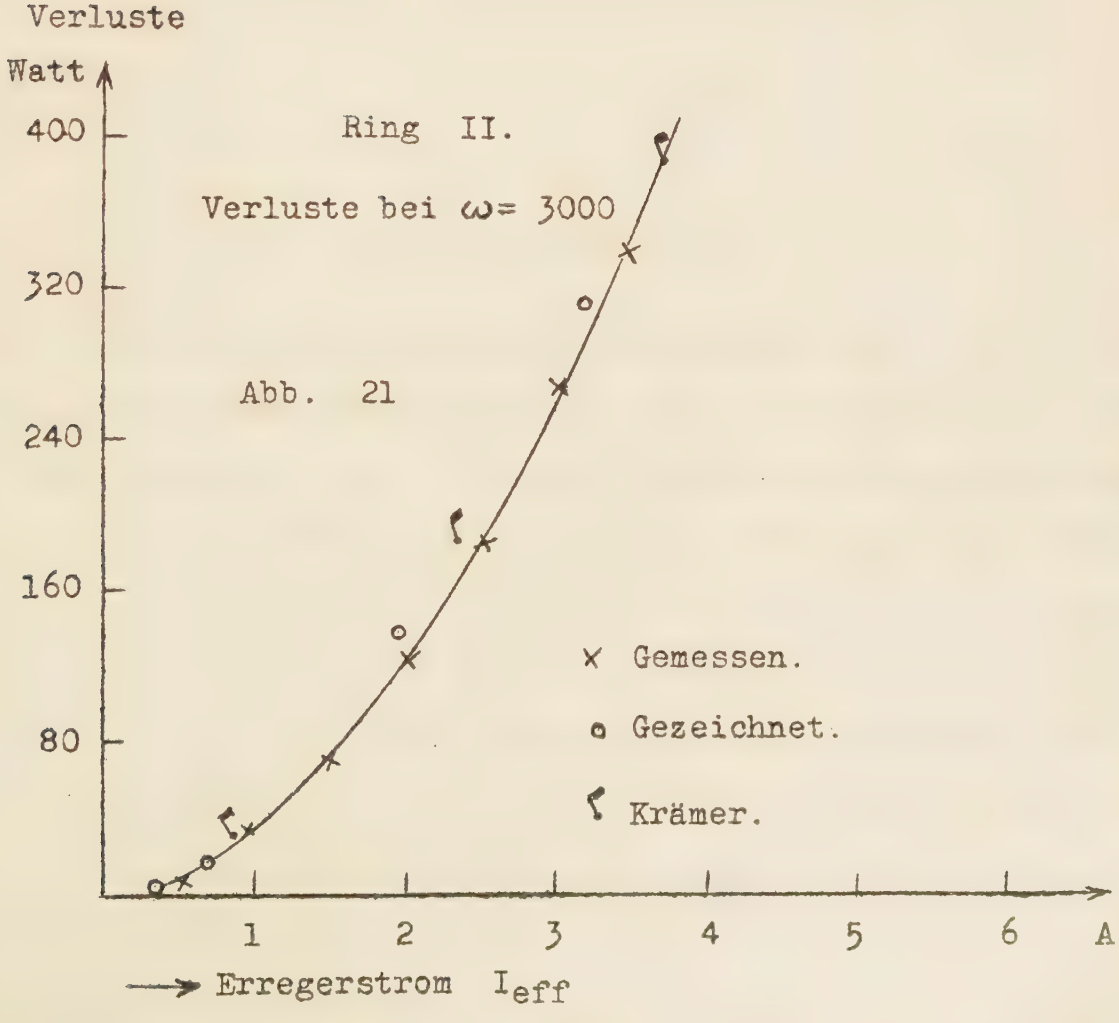
Um die Brauchbarkeit des zeichnerischen Verfahrens auch bei höheren Frequenzen zu erproben, wurde noch eine Meßreihe durchgeführt bei Tonfrequenz mit $\omega = 3000$ ($f = 478$). Als Leistungsmesser wurde ein Sonderinstrument von S. & H. benutzt, das für Messungen bis zu 1000 Hz bestimmt ist. Wie die Abb. 20 bis 22 zeigen, stimmen gemessene und gezeichnete Werte recht gut überein, auch bei Ring III. Das ist um so beachtsamer, als gerade bei ihm eine rein theoretische Berechnung sehr schwer ist, nicht nur wegen der großen Hysteresisschleifen und starken Krümmung der Magnetisierungskurve, sondern auch wegen der rechteckigen Form des Querschnitts.

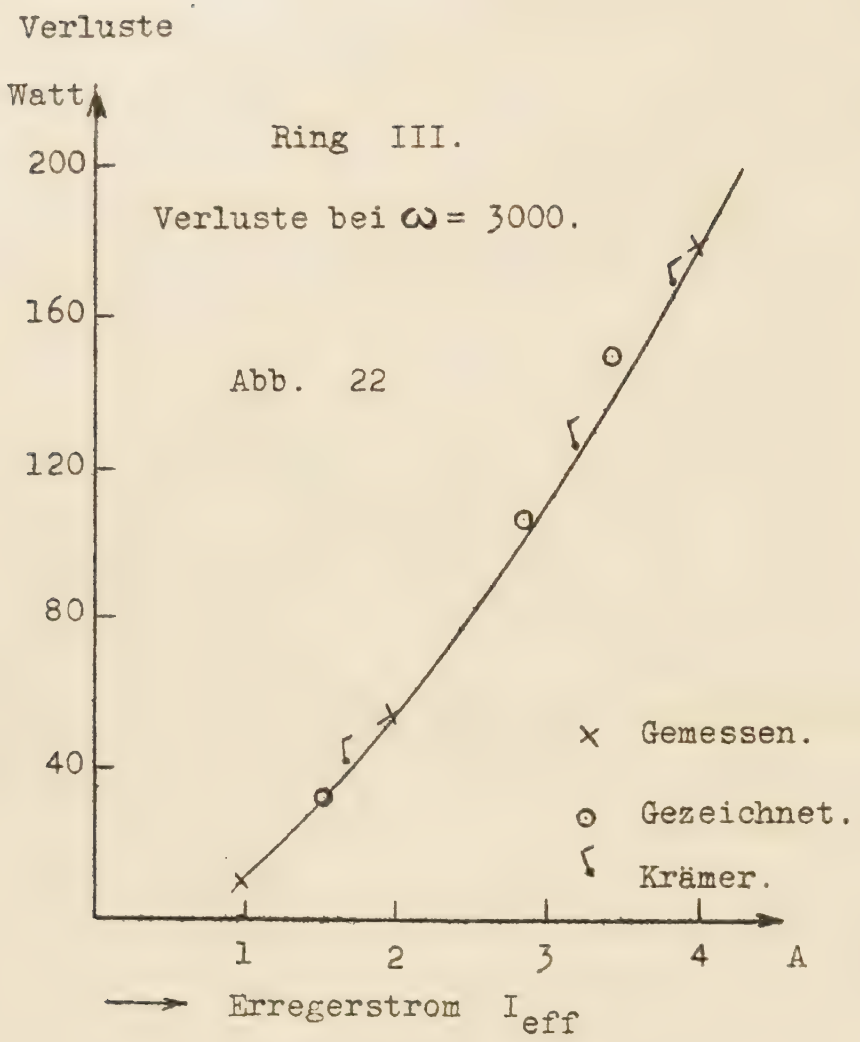
In Abb. 21 und 22 sind auch noch die Werte eingetragen, die sich ergeben aus der Gl:

$$V_{w+h} = 1{,}49\ 10^{-4} \sqrt{\varrho\, f\, sw^3_{eff}\, B}\ \sqrt{1 + \sin\alpha}\quad \frac{Watt}{cm^2}$$

Diese Gleichung ist von Krämer in seiner Dr.-Arbeit auf S. 7-9 behandelt. Sie setzt voraus, daß es sich um ausgesprochene Hautwirkung handelt. Diese Voraussetzung ist hier erfüllt. Daher die gute Übereinstimmung mit den eigenen Ergebnissen.


Verluste
Ring I.
Watt
Verluste bei ω= 3000.
60
40
20
Abb. 20
× Gemessen.
o Gezeichnet.
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
A
→ Ieff


Verluste
Watt
400
Ring II.
Verluste bei ω= 3000
320
Abb. 21
240
160
80
× Gemessen.
o Gezeichnet.
Krämer.
1
2
3
4
5
6
A
→ Erregerstrom Ieff



11. Zusammenfassung.

Die Wirbelstromverluste in massivem Eisen lassen sich ermitteln mit Hilfe des Vektordiagrammes eines Trafos mit ineinandergeschachtelten Kernen (1 und 2). Das Verfahren läßt sich unmittelbar aus den Maxwellschen Gleichungen beweisen (3) und ist auch anwendbar bei starker Sättigung und Hysteresis (4) sowie bei kreis= und rechteckförmigen Querschnitten (5). Um Zeit zu sparen, konstruiert man das Diagramm zweckmäßig von halbaußen an (6). Wie die Krümmung der Magnetisierungskurve die Feldverteilung beeinflußt, wird an einem Beispiel gezeigt (7). Die Versuchsergebnisse (8 - 10) bei niedrigen (9) und Tonfrequenzen (10) stimmen gut überein mit den errechneten.

Bezeichnungen.

$\mathfrak{A}$ Strombelag $(\frac{A}{cm})$

$\mathfrak{B}$ Scheitelwert der Induktion. $\mathfrak{B}' = \frac{d\mathfrak{B}}{dx}$

C Zahlenfaktor

F Fläche der Hysteresisschleife

$\mathfrak{J}$ Wirbelstrom einer Zone $(\frac{A}{cm})$

R Elektrischer Widerstand einer Wirbelstromzone.

$\mathfrak{U}$ Klemmenspannung (Volt)

a Seite eines rechteckigen Querschnittes in der x=Richtung

b " " " " " " y=Richtung

f Frequenz (Hz)

j $\sqrt{-1}$ $\mathfrak{i}$ = Wirbelstromdichte $(\frac{A}{cm^2})$

m $=\frac{b}{a}$ Verhältnis der Rechteckseiten

q Fläche einer Zone (cm^2)

u Umfang eines Querschnittes (cm)

Δ Blechstärke

δ Zonenbreite

ϱ Spezifischer elektrischer Widerstand des Eisens (Ω cm)

Literatur.

Fränkel, Theorie der Wechselströme

Hayashi, 5=stellige Tafeln der Kreis= und Hyperbelfunktionen

Jahnke-Emde, Funktionstafeln

Annalen der Physik

Krämer, Wirbelströme in massivem Eisen.
Dr.=Dissertation, T. H. Braunschweig

Lebenslauf.

Ich bin geboren 1904 in Breslau als Sohn des Reg.= Amtmannes B r u n o B ö h m, legte Ostern 22 die Reifeprüfung ab und studierte dann an der T. H. Breslau von 1922 bis 1926 Elektrotechnik. Nach kurzer Assistententätigkeit am Lehrstuhl für Mathematik der hiesigen T. H. ging ich zu S.&H., Bln - Siemensstadt, und Zwietusch. Seit 1930 stehe ich als Postreferendar im Dienst der Deutschen Reichspost.

Dipl.=Ing J o s e p h B ö h m

Postreferendar

Die vorliegende Arbeit wurde in der Zeit von Herbst 1930 bis Ende 1933 im Elektrotechnischen Institut der Technischen Hochschule Breslau ausgeführt. Ein Teil der Messungen erfolgte in den Laboratorien des Reichspostzentralamtes, Berlin - Tempelhof. Dafür bin ich meiner Verwaltung, der Deutschen Reichspost, zum Dank verpflichtet.

Mein besonderer Dank aber gebührt wegen der vielfachen Anregungen, Unterstützung und Förderung meinem sehr verehrten Lehrer, dem Direktor des Elektrotechnischen Institutes, Herrn Professor Dr.-Ing. G. Hilpert.

Der Verfasser.